

SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ PRO PROJEKT PŘÍRODNÍ VĚDY AKTIVNĚ A INTERAKTIVNĚ

CZ.1.07/1.1.24/01.0040

Grafy lineárních a kvadratických funkcí

Mgr. Miroslav Horák, 2012, 15 stran

Obsah

Úvod	3
1. Lineární funkce	3
1.1. Řešený příklad:	3
1.2. Řešený příklad:	4
1.3. Řešený příklad:	4
1.4. Příklad:	5
1.5. Příklad	5
1.6. Příklad	5
2. Lineární funkce s absolutní hodnotou	6
2.1 Řešený příklad	6
2.2 Řešený příklad	6
2.3 Příklad	7
2.4 Příklad	7
3. Kvadratické funkce	7
3.1 Řešený příklad	7
3.2 Řešený příklad	8
3.3 Řešený příklad	9
3.4 Řešený příklad	10
3.5 Příklad	10
3.6 Příklad	11
3.7 Příklad	11
4. Řešení	12
4.1 Lineární funkce:	12
4.2 Lineární funkce s absolutní hodnotou:	13
4.3 Kvadratické funkce:	14
Závěr	15

Úvod

Následující část sbírky je určena pro první ročník střední školy a zabývá se převážně grafy lineárních a kvadratických funkcí. Sbíрку tvoří základní typy úloh dané problematiky a každá část obsahuje nejprve podrobně řešený příklad daného typu včetně sestrojení příslušného grafu a dále několik podobných příkladů, jejichž řešení je vždy na konci sbírky.

1. Lineární funkce

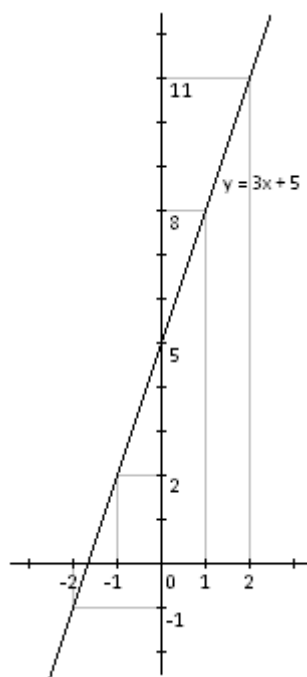
1.1. Řešený příklad:

Sestrojte graf lineární funkce $f: y = 3x + 5$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Nejprve vytvoříme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8	11

$y(-2) = 3 \cdot (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$, atd.



Obrázek 1 f: $y = 3x + 5$

1.2. Řešený příklad:

Určete, zda body $A = [4; 10]$, $B = [-3; 4]$, $C = [0; 0]$ a $D = [1; 1]$ leží na grafu funkce $f: y = 3x - 2$.

Souřadnice bodů dosadíme do rovnice funkce a provedeme zkoušku:

$$A: L = 10$$

$$P = 3 \cdot 4 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$L = P$$

$$A \in f$$

$$B: L = 4$$

$$P = 3 \cdot (-3) - 2 = -9 - 2 = -11$$

$$L \neq P$$

$$B \notin f$$

$$C: L = 0$$

$$P = 3 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$L \neq P$$

$$C \notin f$$

$$D: L = 1$$

$$P = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$L = P$$

$$D \in f$$

1.3. Řešený příklad:

Sestavte rovnici lineární funkce určené tabulkou:

x	1	3	5
y	-2	1	4

Řešení:

Hodnoty x a y dosadíme do obecné rovnice lineární funkce $y = ax + b$ a sestavíme soustavu rovnic.

$$-2 = 1a + b$$

$$\underline{1 = 3a + b}$$

$$b = 1 - 3a$$

$$-2 = a + 1 - 3a$$

$$-3 = -2a$$

$$\underline{a = 3/2}$$

$$b = 1 - 3 \cdot 3/2$$

$$\underline{b = -7/2}$$

$$y = 3/2 x - 7/2$$

1.4. Příklad:

Sestrojte grafy lineárních funkcí určených rovnicí:

$$f_1: y = x - 2$$

$$f_2: y = 5 - 2x$$

$$f_3: y = 1/2 x + 2$$

$$f_4: y = x - 1$$

$$f_5: y = 4 + x$$

$$f_6: y = 2 - x$$

1.5. Příklad

Určete, zda body $A = [4; -5]$, $B = [8; -13]$, $C = [-1; 8]$, $D = [-3; 9]$ a $E = [0; -2]$ leží na grafu funkce $f: y = 3 - 2x$.

1.6. Příklad

Sestavte rovnici lineární funkce určené tabulkou:

a)

x	1	2	3
y	-1	2	5

b)

x	-2	-1	0
y	9	6	3

c)

x	2	3	4
y	-2	-1	0

2. Lineární funkce s absolutní hodnotou

2.1 Řešený příklad

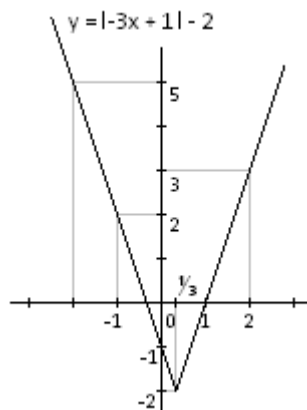
Sestrojte graf funkce s absolutní hodnotou $f: y = |-3x + 1| - 2$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Nejprve vytvoříme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	-1	0	3

$$y(-2) = |-3 \cdot (-2) + 1| - 2 = |6 + 1| - 2 = |7| - 2 = 7 - 2 = 5, \text{ atd.}$$



Obrázek 2 $f: y = |-3x + 1| - 2$

2.2 Řešený příklad

Určete, zda body $A = [2; -2]$, $B = [1; 1]$, $C = [-1; 4]$ a $D = [-3; 2]$ leží na grafu funkce $f: y = -2|x + 1| + 4$.

Řešení:

Souřadnice bodů dosadíme do rovnice funkce a provedeme zkoušku:

A: $L = -2$

$$P = -2|2 + 1| + 4 = -2|3| + 4 = \\ = -2 \cdot 3 + 4 = -6 + 4 = -2$$

$$L = P$$

$$A \in f$$

B: $L = 1$

C: $L = 4$

$$P = -2|-1 + 1| + 4 = -2|0| + 4 = \\ = -2 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$L = P$$

$$C \in f$$

D: $L = 2$

$$P = -2 |1 + 1| + 4 = -2 |2| + 4 =$$

$$= -2 \cdot 2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$L \neq P$$

$$B \notin f$$

$$P = -2 |-3 + 1| + 4 = -2 |-2| + 4 =$$

$$= -2 \cdot 2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

$$L \neq P$$

$$D \notin f$$

2.3 Příklad

Sestrojte grafy funkcí s absolutní hodnotou určených rovnicí:

$$f_1: y = 2 |2 - 2x| - 1$$

$$f_2: y = -|2x - 3| - 3$$

$$f_3: y = 2 |2x - 1|$$

$$f_4: y = -3 |-x| + 3$$

$$f_5: y = -2 |x + 1| + 4$$

$$f_6: y = |3x - 2| - 2$$

2.4 Příklad

Určete, zda body $A = [-1; 3]$, $B = [0; 2]$, $C = [4; 8]$, $D = [1; -3]$ a $E = [2; 7]$ leží na grafu funkce

$$f: y = |3x - 2| - 2.$$

3. Kvadratické funkce

3.1 Řešený příklad

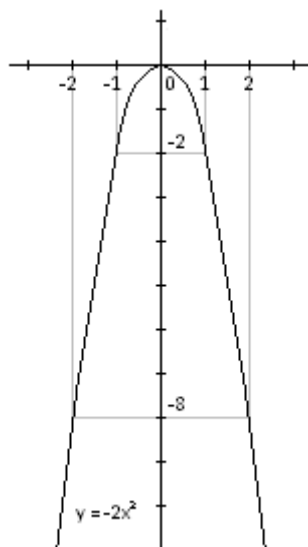
Sestrojte graf kvadratické funkce $f: y = -2x^2$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Nejprve vytvoříme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

$$y(-2) = -2 \cdot (-2)^2 = -2 \cdot 4 = -8, \text{ atd.}$$



Obrázek 3 f: $y = -2x^2$

3.2 Řešený příklad

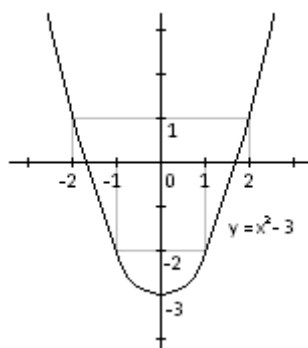
Sestrojte graf kvadratické funkce $f: y = x^2 - 3$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Nejprve vytvoříme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

$$y(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$



Obrázek 4 f: $y = x^2 - 3$

3.3 Řešený příklad

Sestavte rovnici kvadratické funkce určené tabulkou:

x	-2	1	4
y	7	1	31

Hodnoty x a y dosadíme do obecné rovnice kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ a sestavíme soustavu

rovníc.

$$7 = 4a - 2b + c$$

$$1 = a + b + c$$

$$\underline{31 = 16a + 4b + c}$$

$$\underline{a = 1 - b - c}$$

$$7 = 4 - 4b - 4c - 2b + c$$

$$\underline{31 = 16 - 16b - 16c + 4b + c}$$

$$3 = -6b - 3c \quad :3$$

$$15 = -12b - 15c \quad :3$$

$$1 = -2b - c$$

$$\underline{5 = -4b - 5c}$$

$$\underline{c = -2b - 1}$$

$$5 = -4b - 5(-2b - 1)$$

$$5 = -4b + 10b + 5$$

$$0 = 6b$$

$$\underline{b = 0}$$

$$c = -2 \cdot 0 - 1$$

$$\underline{c = -1}$$

$$a = 1 - 0 + 1$$

$$\underline{a = 2}$$

$$y = 2x^2 - 1$$

3.4 Řešený příklad

Určete souřadnice vrcholu paraboly dané funkcí $f: y = x^2 + 2x + 2$.

Řešení:

Nejdříve vypočítáme x -ovou souřadnici dosazením do vzorce $x = -b/2a$.

$$x = -2 / 2 \cdot 1$$

$$x = -1$$

Souřadnici y získáme dosazením x do rovnice funkce.

$$y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 2$$

$$y = 1 - 2 + 2$$

$$y = 1$$

Vrchol paraboly je bod $V = [-1; 1]$.

3.5 Příklad

Sestrojte grafy kvadratických funkcí určených rovnicí:

$$f_1: y = x^2 + 3$$

$$f_2: y = x^2 + 2x$$

$$f_3: y = 2x^2 + 4x$$

$$f_4: y = -x^2 + 2$$

$$f_5: y = x^2 + 2x - 2$$

$$f_6: y = x^2 - 4x + 4$$

3.6 Příklad

Sestavte rovnici kvadratické funkce určené tabulkou:

a)

x	-3	1	4
y	0	4	28

b)

x	-4	-2	2
y	30	6	6

c)

x	-1	1	4
y	1	3	-9

3.7 Příklad

Určete souřadnice vrcholů parabol daných funkcemi:

$$f_1: y = x^2 + 4x + 3$$

$$f_2: y = 4x^2 + 2$$

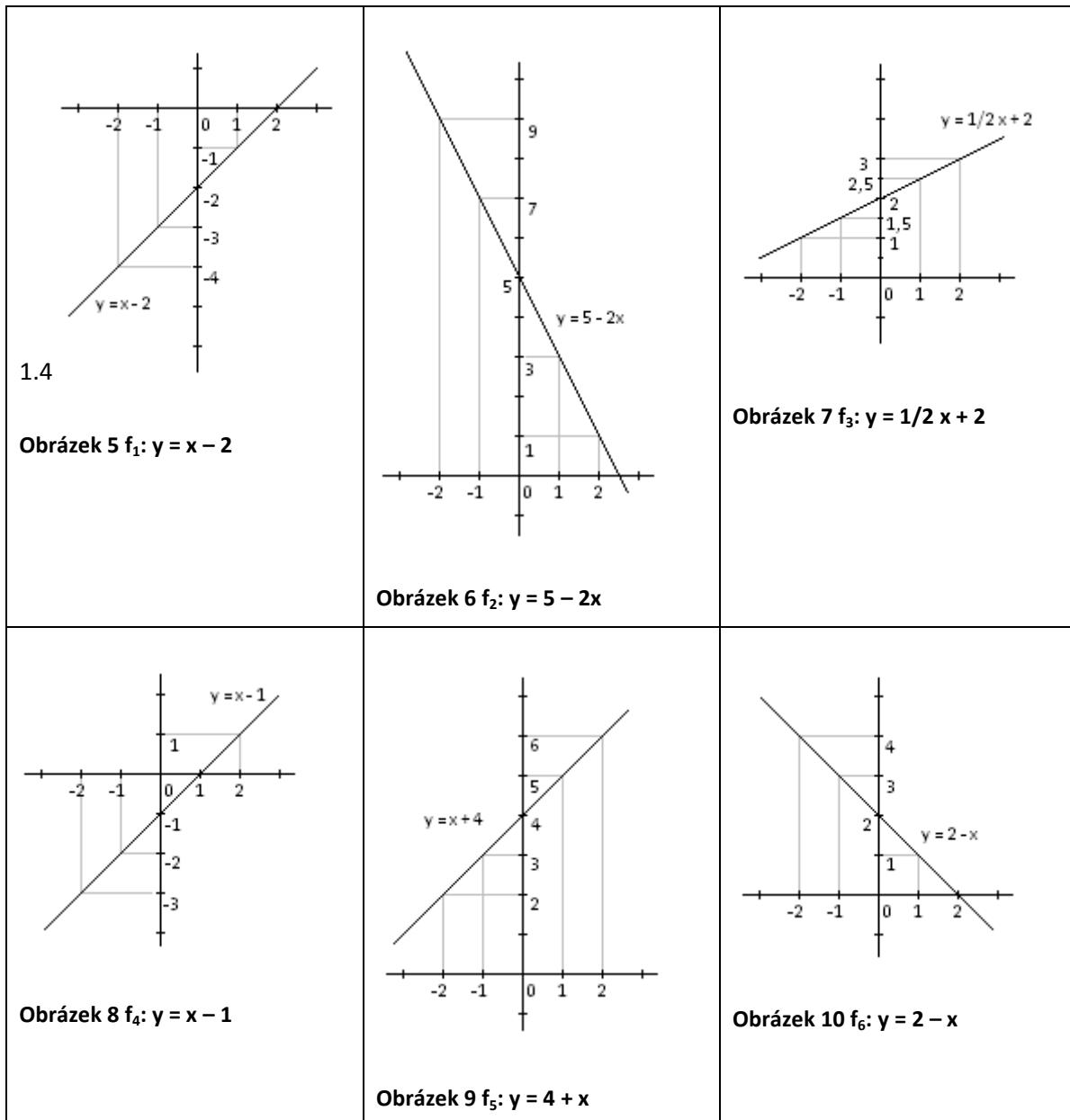
$$f_3: y = x^2 + 2x + 7$$

$$f_4: y = 2x^2 + 6x + 8$$

4. Řešení

4.1 Lineární funkce:

1.4

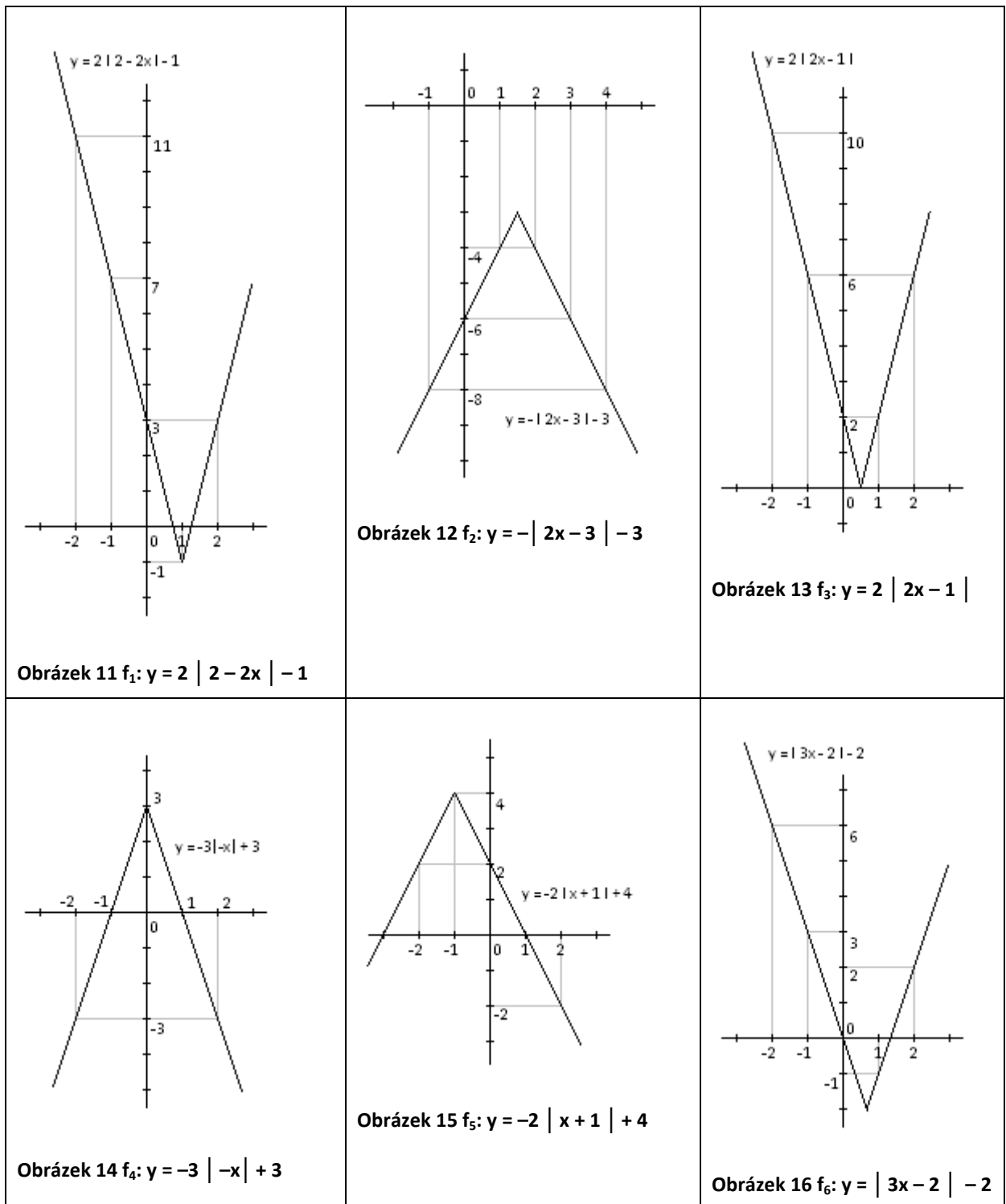


1.5 $A = [4; -5]$, $A \in f$, $B = [8; -13]$, $B \notin f$, $C = [-1; 8]$, $C \notin f$, $D = [-3; 9]$, $D \in f$, $E = [0; -2]$, $E \notin f$

1.6 $f_1: y = 3x - 4$, $f_2: y = -3x + 3$, $f_3: y = x - 4$

4.2 Lineární funkce s absolutní hodnotou:

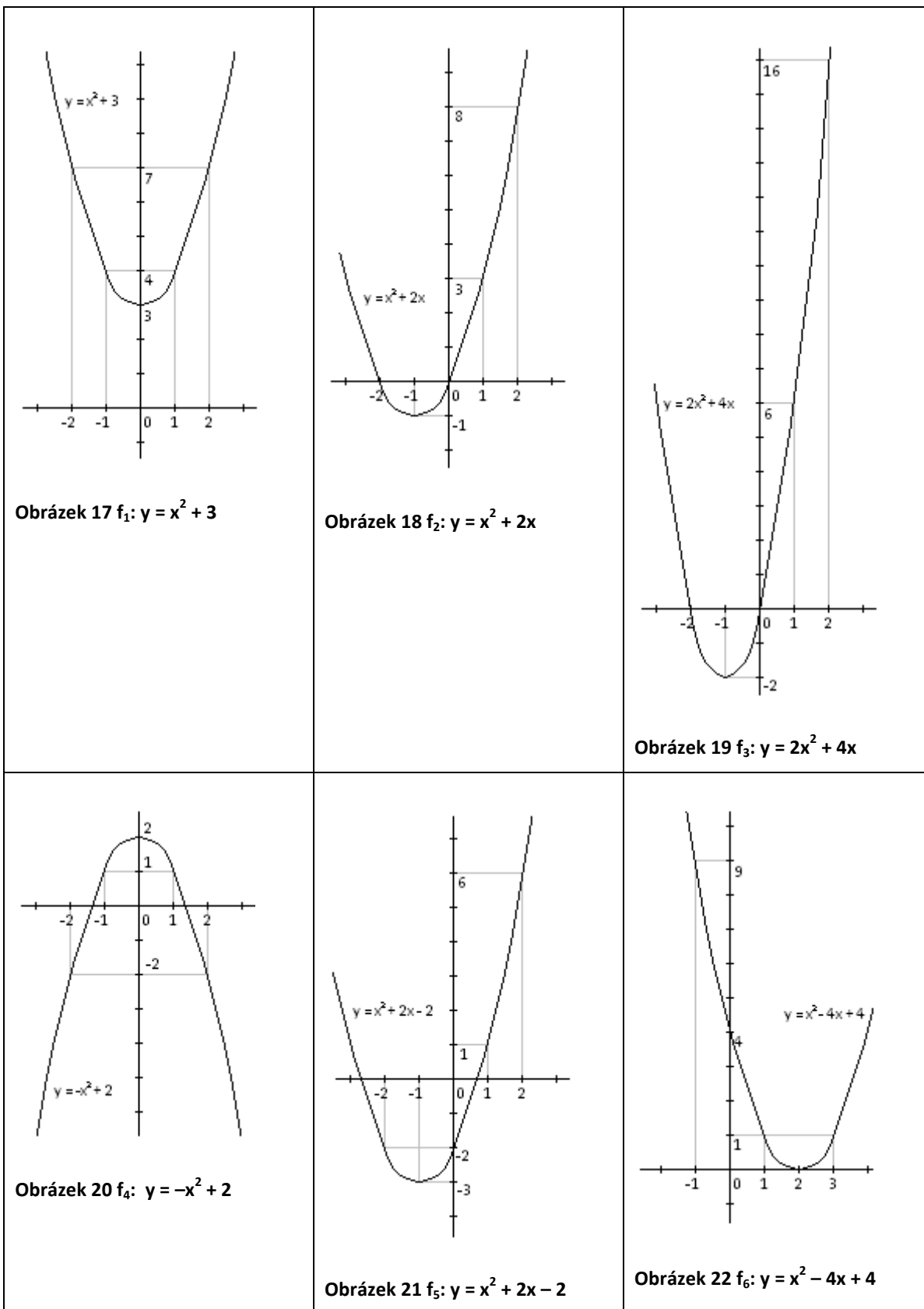
2.3



2.4 $A = [-1; 3], A \in f, B = [0; 2], B \notin f, C = [4; 8], C \in f, D = [1; -3], D \notin f, E = [2; 7], E \notin f$

4.3 Kvadratické funkce:

3.5



3.6 $f_1: y = x^2 + 3x$, $f_2: y = x^2 - 2$, $f_3: y = -x^2 + x + 3$

3.7 $V_1 = [-2; -1]$, $V_2 = [0; 2]$, $V_3 = [-1; 6]$, $V_4 = [-1,5; -3,5]$

Závěr

Sbírka měla za úkol nabídnout studentům prvního ročníku úlohy z teorie funkcí, které slouží hlavně k procvičení základních dovedností při konstrukci jejich grafů.

Obrázky byly vytvořeny a upraveny v programu Malování.